

**Державна служба України з надзвичайних ситуацій
Національний університет цивільного захисту України
Кафедра автоматичних систем безпеки та інформаційних технологій**

ЗАТВЕРДЖУЮ

Начальник кафедри АСБтаІТ

Роман ШЕВЧЕНКО

Навчальна дисципліна
**СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КОНТРОЛЮ
НЕБЕЗПЕЧНИХ ФАКТОРІВ**

Лекція № 3

**МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ХАРАКТЕРИСТИК АВТОМАТИЧНИХ
СИСТЕМ КОНТРОЛЮ ТА СПОСТЕРЕЖЕННЯ. СТАНДАРТНІ ВХІДНІ
СИГНАЛИ. ТИПИ ХАРАКТЕРИСТИК АВТОМАТИЧНИХ СИСТЕМ.
ЕЛЕМЕНТАРНІ ДИНАМІЧНІ ЛАНКИ ТА ЇХ КЛАСИФІКАЦІЯ.
ПЕРЕХІДНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИНАМІЧНИХ ЛАНОК.**

Лекцію розробив:
Доцент кафедри АСБтаІТ

Вячеслав ДУРЄЄВ

ХАРКІВ 2024

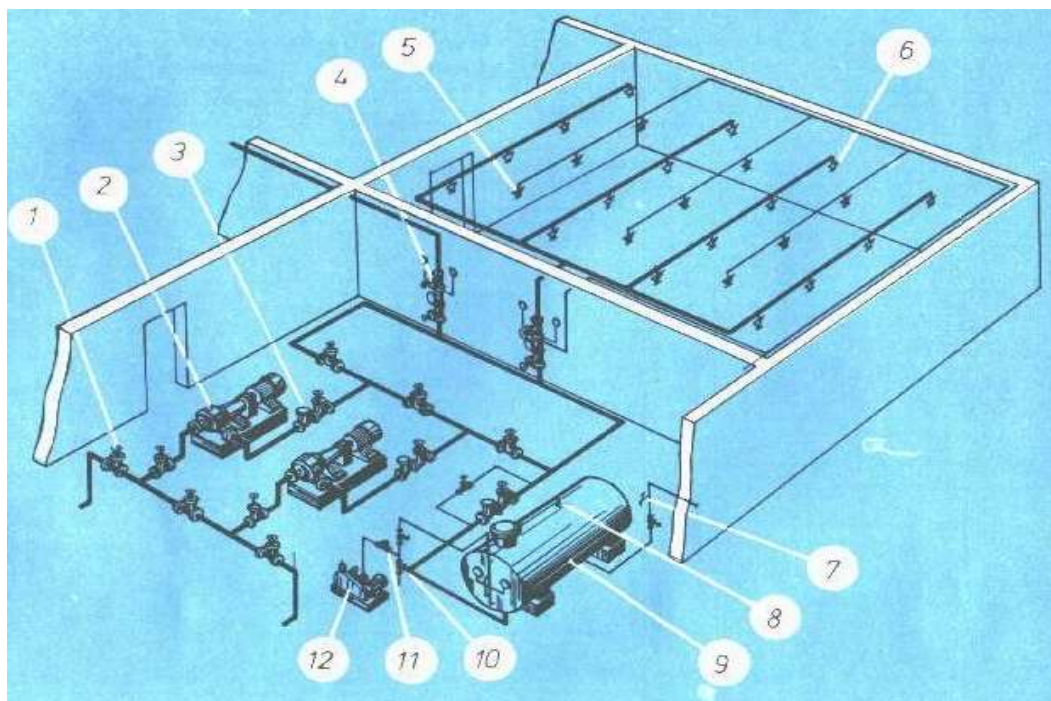
Зміст лекції:

Вступ

1. Стандартні входні впливи.
2. Характеристики АС
3. Математичний опис характеристик АС.
 - 3.1. Перехідні функції АС.
 - 3.2. Імпульсні функції АС.
 - 3.3. Частотні функції АС.
4. Логарифмічні частотні характеристики (ЛЧХ).
 - 4.1. Логарифмічна амплітудна характеристика (ЛАХ).
 - 4.2. Логарифмічна фазова характеристика (ЛФХ).
 - 4.3. Частотні функції ланок й їхніх з'єднань
5. Типові динамічні ланки АС.
 - 5.1. Позиційні ланки.
 - 5.2. Інтегруючі ланки.
 - 5.3. Ланки, що диференціюють.

ВСТУП

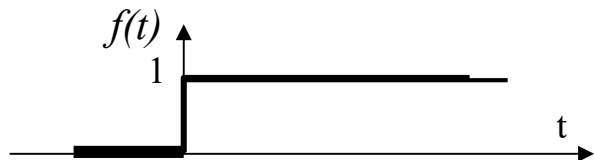
В другій лекції, на прикладі АУВПГ було показано, що люба по складності пожежна АС, може бути представлена набором окремих простих елементів. Сьогодні на занятті ми розглянемо, як можливо математично записати усі її елементи, та виразити діючи на них сигнали.



1. СТАНДАРТНІ ВХІДНІ ВПЛИВИ

В автоматичі прийнято розглядати реакції АС на вхідні сигнали визначеної форми, що називаються стандартними.

Одиничний східчастий сигнал: $f(t)=1(t)$.



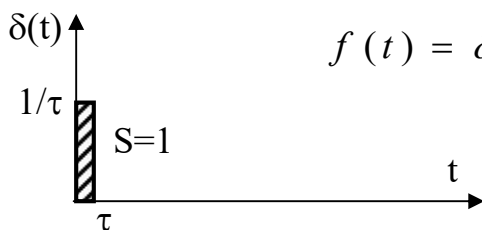
При $t \leq 0$, $f(t)=0$;
При $t > 0$, $f(t)=1(t)$, $F(p)=1/p$.

Одиничний східчастий сигнал швидкості:

$$\dot{f}(t) = 1(t) \quad , \quad F(p) = \frac{1}{p^2}.$$

$$f(t) = \int_0^t 1(t) \cdot dt \quad ; \quad F(p) = L \left[\int_0^t 1(t) \cdot dt \right] = \frac{1}{p^2};$$

Одиничний імпульсний сигнал (дельта функція):



$$f(t) = \delta(t) \quad , \quad F(p) = 1.$$

Одиничний гармонійний сигнал:

$$f(t) = \cos(\omega \cdot t) \quad , \quad F(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

2. ХАРАКТЕРИСТИКИ АС

Реакції АС на стандартні вхідні сигнали мають визначені назви.

Перехідною характеристикою (ПХ) називають графічне зображення реакції АС на східчастий сигнал. Математичне вираження перехідної характеристики називається **перехідною функцією (ПерФ)**.

Імпульсною (ваговою) характеристикою (ІХ) називають графічне зображення реакції АС на одиничний імпульсний сигнал. Математичне вираження імпульсної характеристики називається **імпульсною (ваговою) функцією (ІФ)**.

Частотною характеристикою (ЧХ) називають графічне зображення реакції АС на гармонійний сигнал. Математичне вираження гармонійної характеристики називається **частотною функцією (ЧФ)**.

3. МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ХАРАКТЕРИСТИК АС

3.1. Перехідні функції АС.

Щоб одержати перехідну функцію необхідно вирішити ДР, що описує динаміку АС при одиничному східчастому сигналі на вході. Рішення ДУ і є перехідною функцією.

Приклад:

Нехай пожежна АС описується рівнянням динаміки:

$$T \dot{\bar{y}} + \bar{y} = K \bar{x}$$

Потрібно знайти ПерФ при нульових початкових умовах:

$$\text{при } t=0, \bar{y}(0) = 0.$$

Рішення диференціального рівняння легко одержати скориставшись таблицею перетворень Лапласа.

Запишемо рівняння динаміки в операторній формі:

$$TpY + Y = KX.$$

Визначимо зображення вхідного сигналу для $X = \frac{1}{p}$, ($\bar{x} = 1(t)$).

$$Y = \frac{K}{Tp + 1} \cdot X \text{ или } Y = \frac{K}{Tp + 1} \cdot \frac{1}{p}.$$

З таблиць перетворень Лапласа знайдемо оригінал отриманого зображення:

$$\bar{y}(t) = K \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}}).$$

3.2 Імпульсні функції АС.

Щоб одержати імпульсну функцію необхідно вирішити ДР, що описує динаміку АС при одиничному імпульсному сигналі на вході. Рішення ДУ і є імпульсною функцією.

Нехай АС описується рівнянням динаміки.

$$T \dot{\bar{y}} + \bar{y} = K \bar{x}$$

Потрібно знайти імпульсну функцію при нульових початкових умовах:

$$\text{при } t=0, \bar{y}(0) = 0.$$

Запишемо рівняння динаміки в операторній формі:

$$TpY + Y = KX.$$

Визначимо зображення вхідного сигналу для $X = 1$, ($\bar{x} = \delta(t)$).

$$Y = \frac{K}{Tp + 1} \cdot X \text{ или } Y = \frac{K}{Tp + 1}.$$

З таблиць перетворень Лапласа знайдемо оригінал отриманого зображення:

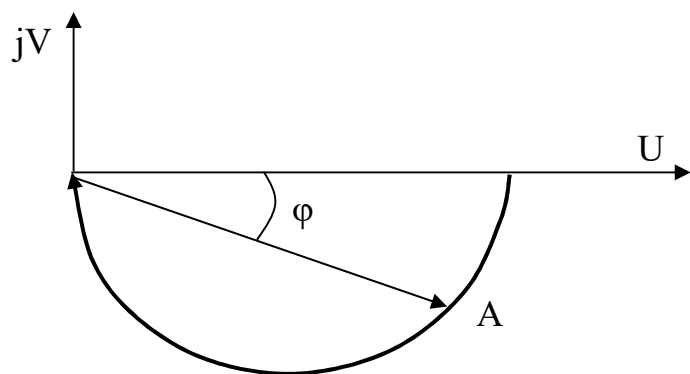
$$\bar{y}(t) = \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}.$$

3.3. Частотні функції АС.

Подамо на вхід АС гармонійний сигнал. Через якийсь час на виході АС установаються гармонійні коливання з такою ж частотою, але амплітудою b і зрушенням фази φ :

$$x(t) = a \cos(\omega t) \xrightarrow{t} y(t) = b \cos(\omega t + \varphi).$$

Амплітудною фазовою частотною характеристикою (АФЧХ) називають залежність співвідношення амплітуд $A(\omega)$ и зрушення фази $\varphi(\omega)$ від частоти коливань вхідного сигналу:



АФЧХ зображують на комплексній площині у виді годографа вектору $A(\omega)$, модуль якого дорівнює відношенню амплітуд вихідного і вхідного сигналів $A(\omega) = \frac{b}{a}$; а напрямок визначається зрушенням фази $\varphi = \varphi(\omega)$.

Якщо спостерігається відставання по фазі, то фаза вважається негативної і відкладається по годинній стрілці від полярної осі.

Будь-яку точку АФЧХ можна представити у виді комплексного числа:

$$Ae^{j\varphi} = U + jV.$$

Частотною функцією буде залежність:

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}; \quad \varphi(\omega) = \arctg \left(\frac{V(\omega)}{U(\omega)} \right);$$

чи: $U=U(\omega); \quad V=V(\omega).$

Правило. Щоб одержати **аналітичне вираження АФЧХ** будь-якої АС, необхідно:

1. У передатній функції параметр P замінити на $j\omega$.

2. В отриманому комплексному числі виділити:

$U(\omega)$ – дійсну і $V(\omega)$ – уявну частини.

3. Визначити: $A(\omega) = \sqrt{U^2 + V^2}$; и $\varphi(\omega) = \arctg \left(\frac{V}{U} \right)$.

4. Змінюючи ω від 0 до ∞ , побудувати годограф АФЧХ.

Приклад. Чутливий елемент теплового максимального ПС ТРВ-2 описується рівнянням динаміки $80 \dot{y} + \bar{y} = 90 \bar{x}$. Отримати АФЧХ.

1. У ПФ параметр P замінимо на $j\omega$.

$$W(p) = \frac{90}{80p + 1} \quad P \rightarrow j\omega \quad W(j\omega) = \frac{90}{1 + 80j\omega}$$

2. Виділимо $U(\omega)$ – дійсну і $V(\omega)$ – мниму частини:

$$W(j\omega) = \frac{90}{(1 + j80\omega)} \cdot \frac{(1 - j80\omega)}{(1 - j80\omega)} = \frac{90(1 - j80\omega)}{1 + 6400\omega^2} = \frac{90}{1 + 6400\omega^2} - j \frac{7200\omega}{1 + 6400\omega^2}$$

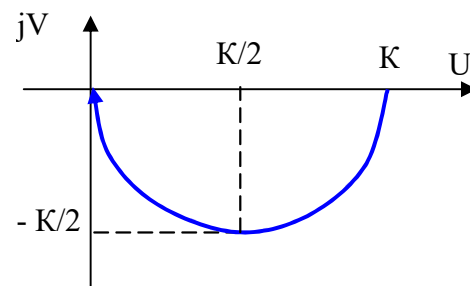
$$U(\omega) = \frac{90}{1 + 6400\omega^2}; \quad V(\omega) = - \frac{7200\omega}{1 + 6400\omega^2}$$

3. Визначимо $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$:

$$A(\omega) = \sqrt{U(\omega)^2 + V(\omega)^2} = \sqrt{\left(\frac{90}{1 + 6400\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{7200\omega}{1 + 6400\omega^2}\right)^2} = \left(\frac{90}{\sqrt{1 + 6400\omega^2}}\right)$$

4. Змінюючи ω від 0 до ∞ , будемо годограф АФЧХ.

ω	U	V	A	φ
0	K	0	K	0
1/T	$\frac{K}{2}$	$-\frac{K}{2}$	$\frac{K}{\sqrt{2}}$	$-\pi/4$
∞	0	0	0	$-\pi/2$



4. Логарифмічні частотні характеристики ЛЧХ.

На практиці частотні характеристики зручно будувати в логарифмічних координатах. ЛЧХ у ряді випадків мають дуже просте зображення, що й обумовило їхнє широке застосування.

4.1. Логарифмічна амплітудна характеристика (ЛАХ).

У ЛАХ по осі абсцис відкладається величина $\lg(\omega)$, а по осі ординат

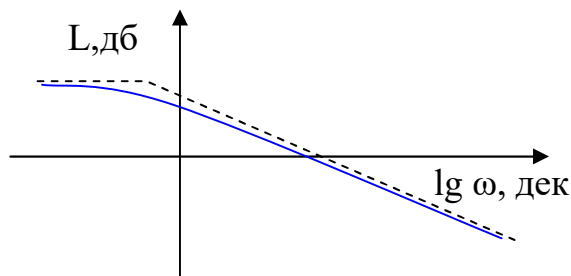
$$L(\omega) = \lg(K_N), \text{ де: } K_N = \frac{N_{ВНХ}}{N_{ВХ}} - \text{коефіцієнт посилення потужності.}$$

За одиницю посилення потужності в логарифмічних координатах приймають таке посилення, при якому потужність вихідного сигналу збільшується в **10** разів і називається “**белом**”. Бел дуже велика величина, тому частіше використовується величина в десять разів менша – децибел (**дБ**).

При гармонійних коливаннях потужність сигналу пропорційна квадрату амплітуди:

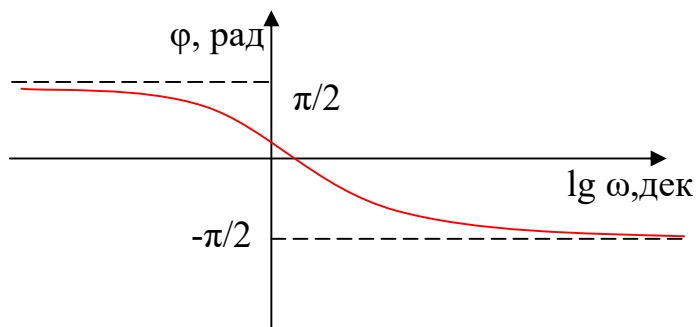
$$K_N(\omega) = \frac{b^2}{a^2} = A^2(\omega); \quad L(\omega) = 20 \lg A(\omega), \quad [\text{дБ}].$$

Одиницею виміру по осі абсцис служить декада. Кожній декаді відповідає збільшення частоти ω у десять разів.



4.2. Логарифмічна фазова характеристика (ЛФХ).

у ЛФХ фаза відкладається в натуральному масштабі, а частота в логарифмічному.



4.3. Частотні функції ланок й їхніх з'єднань

Як уже відзначалося, частотною функцією називається математичне представлення ЧХ – залежності співвідношення амплітуд коливань на вході і виході АС, а також зрушення фази коливань від частоти коливань вхідного сигналу ω . Щоб одержати частотну функцію досить у ПФ $W(p)$ параметр " p " замінити на параметр " $i\omega$ ". Отримане комплексне число $W(i\omega)$ описує АФЧХ на комплексній площині. Щоб побудувати АФЧХ необхідно в комплексному числі $W(i\omega)$ виділити дійсну частину $U(\omega)$ та уявну частину $V(\omega)$ і знайти:

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}; \quad \varphi(\omega) = \arctg \left(\frac{V(\omega)}{U(\omega)} \right),$$

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega).$$

Це загальне правило для будь-який АС. Однак побудову АФЧХ складної АС можна істотно спростити, якщо ПФ представити у виді добутку ПФ простих ланок.

Приклад. Нехай ПФ АС має вид:

$$W(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) .$$

Аналітичне вираження АФЧХ одержимо замінивши в ПФ параметр p на $i\omega$.

$$W(i\omega) = W_1(i\omega) \cdot W_2(i\omega) .$$

Отримане комплексне число представимо в показовій формі:

$$W(i\omega) = A \cdot e^{i\varphi} = A_1 \cdot e^{i\varphi_1} \cdot A_2 \cdot e^{i\varphi_2} = A_1 \cdot A_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} .$$

Отже:

$$A = A_1 \cdot A_2; \quad \varphi_{\Sigma} = \varphi_1 + \varphi_2;$$

$$L_{\Sigma} = 20 \lg A = 20 \lg A_1 + 20 \lg A_2 = L_1 + L_2;$$

Висновок: ЛЧХ добутку ПФ можна одержати додаванням ЛЧХ функцій співмножників.

5. ТИПОВІ ДИНАМІЧНІ ЛАНКИ АС

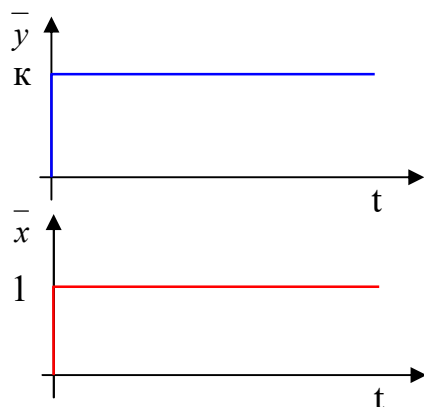
Будь-яка пожежна АС може бути представлена у вигляді з'єднання елементів: вентилі та засувки, пожежні насоси з двигунами-приводами, зворотні клапани, вузли управління, зрошувачі та трубопроводи. Виявляється що, незважаючи на різноманіття конструктивних форм цих елементів, їхня динаміка описується однаковими диференціальними рівняннями. Тому можна уніфікувати елементи по динамічним властивостям. Уніфікований елемент (без обліку конструктивних форм) з певним рівнянням динаміки називається динамічною ланкою. Якщо порядок рівняння динаміки динамічної ланки не перевищує 2-й, то така ланка називається елементарною.

Зауваження. Якщо порядок рівняння динаміки динамічної ланки перевищує 2-й, то така ланка називається складною. Кожну складну ланку можна представити у вигляді набору елементарних ланок. Залежно від властивостей, всі динамічні ланки можна розділити на три групи: позиційні ланки, інтегруючі ланки, ланки, що диференціюють.

5.1. Позиційні ланки.

Ідеальна позиційна ланка.

Ричаг датчика рівня вогнегасної речовини. Переміщення кінця перемістить інший кінець



Рівняння динаміки:

$$\bar{y} = K \cdot \bar{x}; \quad W(p) = K.$$

Ланка миттєво відтворює вхідний сигнал, посилений у "K" раз.

Реальна позиційна ланка.

Пожежний насос. Вхідний сигнал оберти від приводу, вихідний сигнал витрата води.

Рівняння динаміки, ПФ:

$$T \dot{y}(t) + y(t) = K \cdot x(t); \quad W(p) = \frac{K}{Tp + 1}.$$

Знайдемо перехідну функцію, при $x(t) = 1(t)$, $X(p) = \frac{1}{p}$.

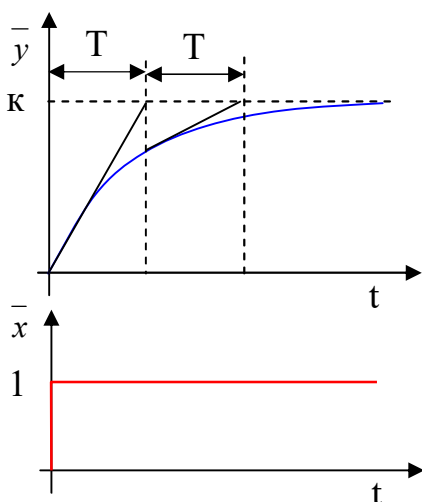
Нульові ПУ: при $t=0$, $y(0) = 0$; $\dot{y}(0) = 0$.

$$Y(p) = W(p) \cdot X(p) = \frac{K}{Tp + 1} \cdot X(p) = \frac{K}{Tp + 1} \cdot \frac{1}{p}.$$

З таблиць перетворень Лапласа знайдемо оригінал отриманого зображення:

$$y(t) = K \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}}).$$

Перехідна характеристика являє собою експоненту.



Особливості ПХ:

1. Графік перехідного процесу являє собою експоненту.
2. Величина проекції дотичної на лінію сталого режиму дорівнює постійної часу T.
3. Тривалість перехідного процесу t_r , час за який вихідний сигнал досягає 95% нового

сталого значення визначається постійної часу: $t_r = 3T$.

Дійсно: $0,95K = K - K \cdot e^{-\frac{t_r}{T}}$, отже $e^{-\frac{t_r}{T}} = 0,05$ или $e^{\frac{t_r}{T}} = 20$.

Прологарифмуємо:

$$\frac{t_r}{T} = \ln 20 \approx 3 \Rightarrow t_r = 3T$$

Довідка. Для заданої умови $\bar{x} = 1(t)$ рівняння динаміки прийме вид: $T \dot{\bar{y}} + \bar{y} = K$
Рішення лінійного диференціального рівняння шукається у вигляді:
 $\bar{y}(t) = \bar{y}_{oo} + \bar{y}_{час}$.

Загальне однорідне рішення має вигляд: $\bar{y}_{oo} = C \cdot e^{pt}$, де p – корінь характеристичного рівняння,

C – постійна інте-

грування, обумовлена з початкових умов.

Приватне рішення в цьому випадку має вигляд правої частини: $\bar{y}_{час} = K$

Характеристичне рівняння ДУ: $TP + 1 = 0$, отже $p = -\frac{1}{T}$

Одержимо: $\bar{y}(t) = C \cdot e^{-\frac{t}{T}} + K$.

Постійну «3» знайдемо з початкових умов: $\bar{y}(0) = C \cdot e^{-\frac{t_0}{T}} + K$, отже $0 = C + K$, звідки $C = -K$.

Остаточно одержимо: $\bar{y}(t) = K \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}})$.

Позиційна ланка 2-го порядку.

Пожежний насос. Вхідний сигнал оберти від приводу, вихідний сигнал витрата води. Ураховуються динамічні процеси, пов'язані з тертям та перетіканням вогнегасної речовини.

Рівняння динаміки, ПФ:

$$T^2 \ddot{\bar{y}} + 2dT \dot{\bar{y}} + \bar{y} = K\bar{x}; \quad W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2dT p + 1}.$$

Знайдемо перехідну функцію при $x(t) = 1(t)$, $X(p) = \frac{1}{p}$.

Нульові ПУ: при $t=0$, $y(0) = 0$; $\dot{y}(0) = 0$; $\ddot{y}(0) = 0$.

$$Y(p) = W(p) \cdot X(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2dT p + 1} \cdot X(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2dT p + 1} \cdot \frac{1}{p}.$$

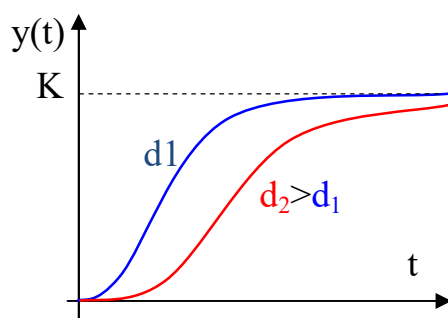
З таблиць перетворень Лапласа знайдемо оригінал отриманого зображення:

1) Декремент загасання $d \geq 1$.

Корені характеристичного рівняння дійсні негативні: $p_{1,2} = -\frac{d}{T} \pm \sqrt{\frac{d^2 - 1}{T^2}}$

Позначимо: $T_1 = -\frac{1}{p_1}$; $T_2 = -\frac{1}{p_2}$.

Представимо ПФ у виді: $W(p) = \frac{K}{(T_1 p + 1) \cdot (T_2 p + 1)} = \frac{K}{T_1 p + 1} \cdot \frac{1}{T_2 p + 1}$.



Рішення ДУ має вид:

$$y(t) = K \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_2}} \right).$$

Перехідна характеристика складається з двох експонент і відповідно до характеру перехідного процесу називається аперіодичної

Особливості ПХ: 1. $\dot{y}(0) = 0$.

2. Мається крапка перегину.

3. Тривалість перехідного процесу залежить не тільки від постійної часу, але і від величини декременту загасання.

Довідка. У випадку дійсних коренів характеристичного рівняння рішення ДУ має вид:

$$y(t) = y_{oo}(t) + y_{чAC}(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + K = C_1 e^{-\frac{t}{T_1}} + C_2 e^{-\frac{t}{T_2}} + K$$

Значення T_1, T_2 визначаються з початкових умов: при $t=0$, $\bar{y}(0) = 0$; $\dot{\bar{y}}(0) = 0$; $\ddot{\bar{y}}(0) = 0$.

$$\dot{\bar{y}}(t) = \frac{C_1}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{C_2}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}; \begin{cases} C_1 + C_2 + K = 0 \\ -\frac{C_1}{T_1} - \frac{C_2}{T_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = K \frac{T_1}{T_2 - T_1}; \quad C_2 = -K \frac{T_2}{T_2 - T_1}.$$

Остаточно одержимо: $y(t) = K \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$.

2) Декремент загасання $d < 1$

Корені характеристичного рівняння комплексно-сполучені:

$$p_{1,2} = -\frac{d}{T} \pm j \sqrt{\frac{1-d^2}{T^2}} = -\alpha \pm j\omega.$$

Рішення ДУ має вид:

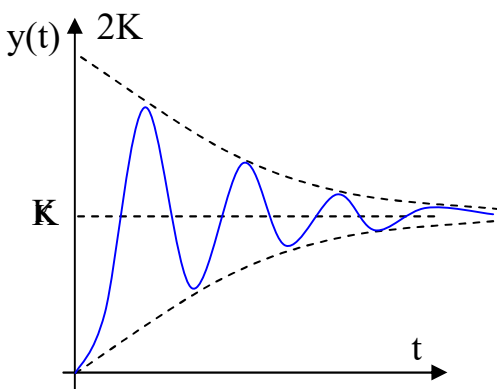
$$y(t) = K \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-d^2}} e^{-\frac{t}{T/d}} \cdot \sin \left(\frac{\sqrt{1-d^2}}{T} t + \arctg \frac{\sqrt{1-d^2}}{d} \right) \right).$$

Позначимо: $T_{ог} = \frac{T}{d}$,

$$\omega = \sqrt{\frac{1-d^2}{T^2}} \quad - \text{ власна частота коливань [рад/с],}$$

$$\phi = \arctg \sqrt{\frac{1-d^2}{d^2}} \quad - \text{ зрушення фази [рад].}$$

Одержимо спрощений запис: $y(t) = K \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-d^2}} e^{-\frac{t}{T_{ог}}} \cdot \sin(\omega t + \phi) \right)$



Особливості ПХ:

1. Перехідний процес буде коливальним. У рішенні ДУ мається гармонійна складова.

2. Графік розташовується між двома обгинаючими. Обгинаючі є експонентою з постійної часу: $T_{ог} = \frac{T}{d}$.

3. Час τ_R можна приблизно оцінити за постійною часу обгинаючої.

$$t_R = 3T_{ог} = \frac{3T}{d}.$$

4.3 $\downarrow d$, $\tau_R \uparrow$. При $d=0$ коливання взагалі не загасають.

Така ланка називається **"консервативною"** (ідеальний маятник).

Довідка. У випадку комплексно-сполучених коренів: $p_{1,2} = -\frac{d}{T} \pm i \cdot \sqrt{\frac{1-d^2}{T^2}} = -\alpha \pm i\omega$.

Загальне рішення ДУ шукається у виді: $\bar{y}_{OO} = C_1 e^{(-\alpha+i\omega)t} + C_2 e^{(-\alpha-i\omega)t}$.

Для того щоб одержати рішення в дійсній формі скористаємося правилом. Якщо ДУ з дійсними коефіцієнтами має комплексне рішення:
 $y(t) = U(t) + iV(t)$,
 то кожна з цих функцій $U(t)$ і $V(t)$ є рішенням цього ДУ.

По формулі Ейлера: $e^{(-\alpha+i\omega)t} = e^{-\alpha t} \cdot (\cos \omega t + i \sin \omega t) = e^{-\alpha t} \cos \omega t + i \cdot e^{-\alpha t} \sin \omega t = U(t) + iV(t)$.

Тоді відповідно до правила функції $U(t) = e^{-\alpha t} \cos \omega t$; и $V(t) = e^{-\alpha t} \sin \omega t$,
 є рішенням вихідного ДУ. Знаючи дві частки рішення, можна побудувати загальне рішення:

$$y_{OO} = C_1 U(t) + C_2 V(t) = e^{-\alpha t} \cdot (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t).$$

Позначимо: $C_1 = A \sin \phi$; и $C_2 = A \cos \phi$.

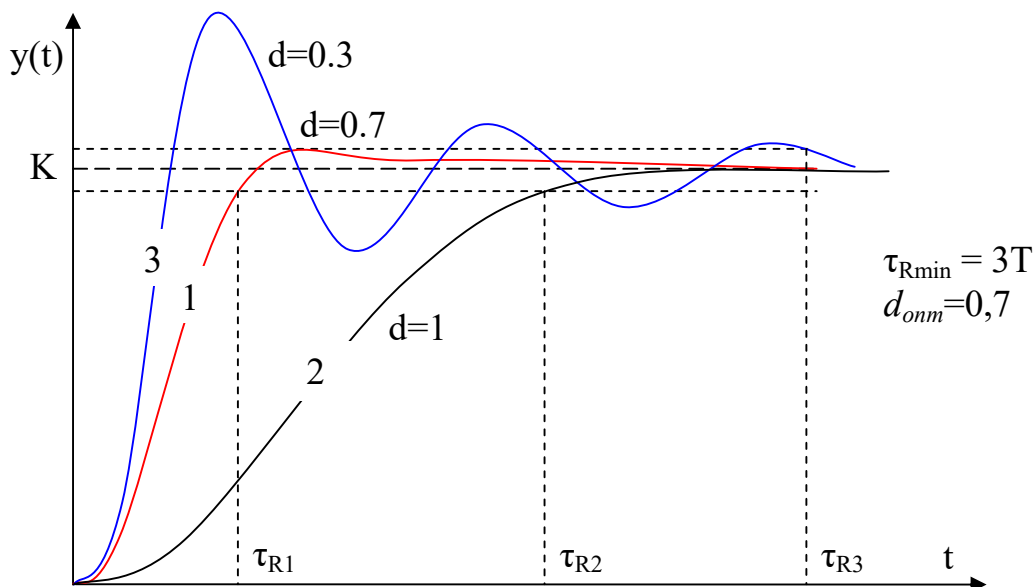
Одержимо: $y_{OO} = e^{-\alpha t} \cdot (A \sin \phi \cos \omega t + A \cos \phi \sin \omega t) = A e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega t + \phi)$.

З начельных умов визначаються єдині значення z_1, z_2 чи A, ϕ .

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \quad \phi = \arctg \frac{C_1}{C_2}.$$

А.Ф. Берман, И.Г. Араманович. Короткий курс математичного аналізу. М., Наука, 1971, стор.591.

На наступному рисунку показаний вплив декременту загасання d на тривалість перехідних процесів ланки 2-го порядку. Мінімальний час перехідного процесу відповідає декременту загасання $d=0,7$.



Висновок. Для забезпечення мінімального часу перехідного процесу сучасні АС проектуються з незначної коливальності перехідних процесів.

5.2. Інтегруючі ланки.

Ідеальна інтегруюча ланка.

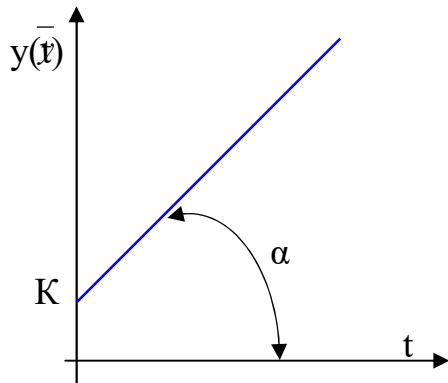
Датчик рівня вогнегасної речовини: вхідний сигнал витрата рідини, вихідний сигнал - рівень рідини.

Рівняння динаміки, ПФ: $T \dot{y}(t) = Kx(t); \quad W(p) = \frac{K}{Tp}.$

Знайдемо перехідну функцію при $x(t) = 1(t)$, $X(p) = \frac{1}{p}.$

Нульові ПУ: при $t=0$, $y(0) = 0$; $\dot{y}(0) = 0.$

$$Y(p) = W(p) \cdot X(p) = \frac{1}{Tp} \cdot \frac{1}{p}.$$



З таблиць перетворень Лапласа знайдемо оригінал отриманого зображення:

$$y(t) = \frac{K}{T} t.$$

Особливості ПХ:

Перехідна характеристика представляє собою пряму лінію з кутом нахилу:

$$\alpha = \arctg \frac{K}{T}.$$

Довідка. Це найбільш просте ДУ, його рішення має вид:

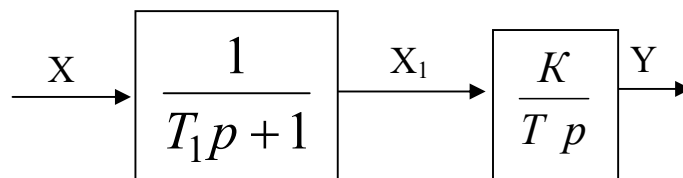
$$y(t) = \frac{K}{T} \int_0^t x(t) \cdot dt = \frac{K}{T} \int_0^t dt = \frac{1}{T} t.$$

Реальна інтегруюча ланка.

перспективна пожежна АС

Рівняння динаміки: $T_1 T \ddot{y}(t) + T \dot{y}(t) = Kx(t).$

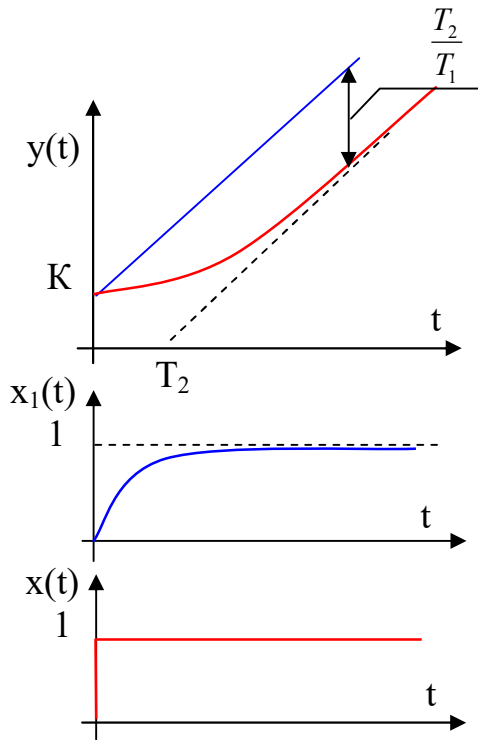
Реальну інтегруючу ланку можна представити у виді послідовного з'єднання інерційної і ідеальної інтегруючої ланок.



Знайдемо перехідну функцію при $x(t) = 1(t)$, $X(p) = \frac{1}{p}.$

Нульові ПУ: при $t=0$, $y(0) = 0$; $\dot{y}(0) = 0.$

$$Y(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) X(p) = \frac{K}{Tp} \cdot \frac{1}{T_1 p + 1} \cdot X(p) = \frac{K}{T p} \cdot \frac{1}{T_1 p + 1} \cdot \frac{1}{p}.$$



Знайдемо оригінал отриманого зображення:

$$y(t) = \frac{K}{T} t - \frac{T_1}{T} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T_1}})$$

Особливості ПХ:

1. При $t \rightarrow \infty$: $e^{-\frac{t}{T_1}} \rightarrow 0$.

$$y(t) \approx \frac{K}{T} t - \frac{T_1}{T}$$

2. Перехідна характеристика реальної інтегруючої ланки відрізняється від ідеальної ланки

на величину $\Delta y = -\frac{T_1}{T}$.

Це відставання вносить інерційна ланка.

Довідка. Перехідна функція першої ланки відома: $\bar{x}_1 = 1 - e^{-\frac{t}{T_1}}$. Тоді для другої ланки одержимо:

$$y = \frac{K}{T_1} \int_0^t (1 - e^{-\frac{t}{T_2}}) dt = \frac{K}{T_1} \left(t + T_2 \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} \right)_0^t = \frac{K}{T_1} (t + T_2 e^{-\frac{t}{T_2}} - T_2) = \frac{K}{T_1} t - \frac{T_2}{T_1} (1 - e^{-\frac{t}{T_2}}).$$

5.3. Ланки що диференціюють.

Ідеальна ланка, що диференціює.

Ідеальний вимірник швидкості.

Рівняння динаміки: $y(t) = K \dot{x}(t)$.

Знайдемо перехідну функцію при $x(t) = 1(t)$, $X(p) = \frac{1}{p}$.

Нульові ПУ: при $t=0$, $y(0) = 0$; $\dot{y}(0) = 0$.

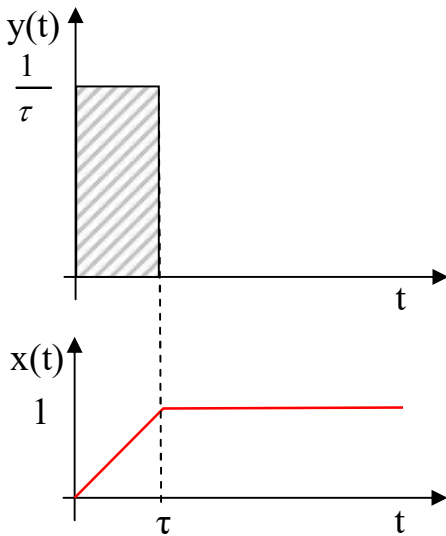
$$Y(p) = W(p) \cdot X(p) = Kp \cdot X(p) = Kp \cdot \frac{1}{p} = K.$$

З таблиць перетворень Лапласа знайдемо оригінал отриманого зображення:

$$\bar{y} = K \cdot \delta(t).$$

Перехідна характеристика являє собою імпульс площею "K".

Щоб зрозуміти перехідну характеристику ідеальної диференціюючої ланки, розглянемо не східчастий сигнал впливу, а сигнал з деяким нахилом, приблизно вважаючи його східчастим.



$$y(t) = \dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{\tau}$$

У цьому випадку імпульс дорівнює по величині $\frac{1}{\tau}$, а площа імпульсу дорівнює:

$$S = \tau \cdot \frac{1}{\tau} = 1.$$

При $\tau \rightarrow 0$, перехідна характеристика прагне до дельта функції $\delta(t)$:

$$l'(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \dot{x}(t) = \delta(t).$$

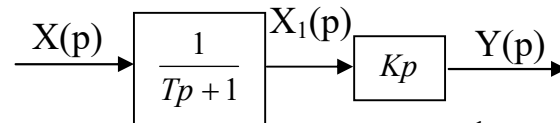
Відповідно: $\int_0^t \delta(t) dt = 1(t).$

Реальна ланка, що диференціює.

Реальний вимірник швидкості

Рівняння динаміки: $T \dot{y}(t) + y(t) = K \dot{x}(t).$

Реальна ланка, що диференціює, можна представити у виді послідовного з'єднання інерційного позиційної й ідеальної диференціюючої ланок.

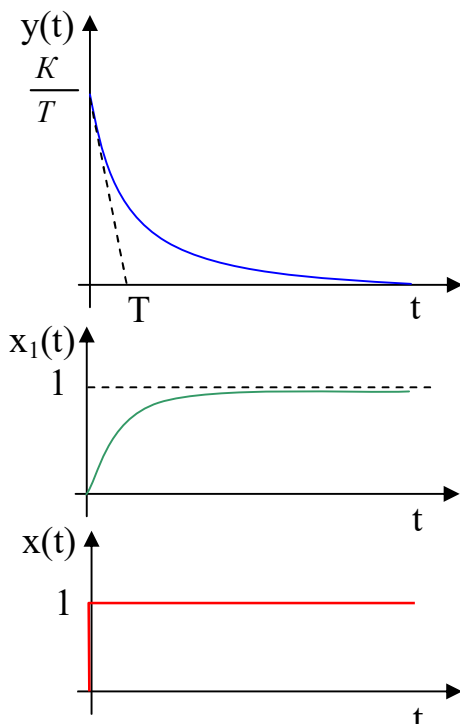


Знайдемо перехідну функцію при $x(t) = 1(t)$, $X(p) = \frac{1}{p}$.

Нульові ПУ: при $t=0$, $y(0) = 0$; $\dot{y}(0) = 0$.

$$Y(p) = W(p) \cdot X(p) = Kp \frac{1}{Tp+1} X(p) = \frac{Kp}{Tp+1} \frac{1}{p}.$$

З таблиць перетворень Лапласа знайдемо оригінал отриманого зображення:



$$y(t) = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

Особливості ПХ:

1. Перехідна характеристика являє собою експоненту.

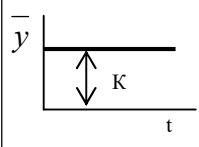
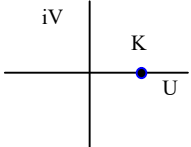
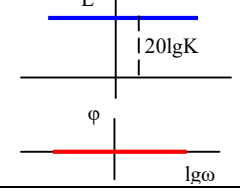
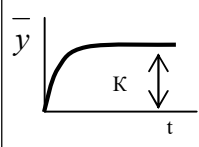
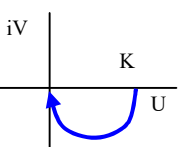
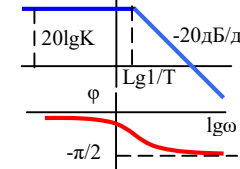
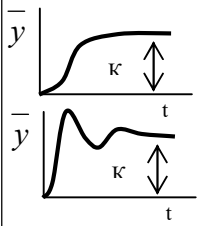
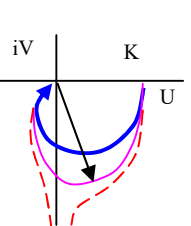
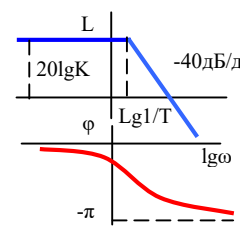
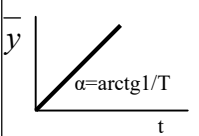
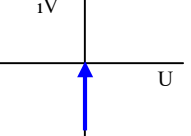
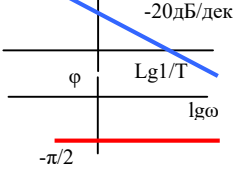
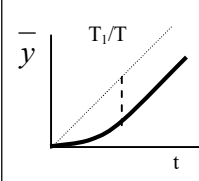
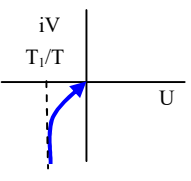
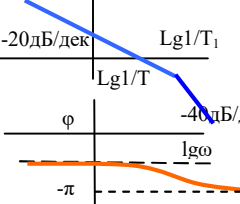
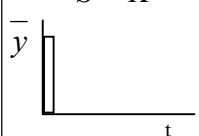
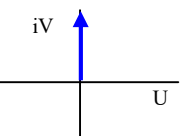
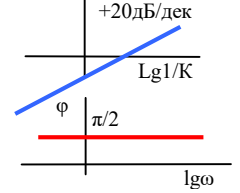
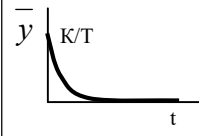
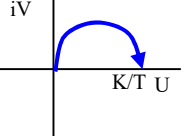
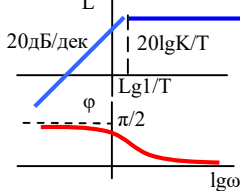
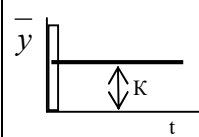
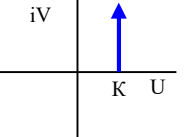
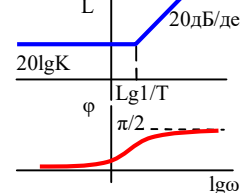
2. При $t=0$ $y(0) = \frac{K}{T}$

3. Чим менше постійна часу інерційного запізнювання T , тим ближче реальна ланка до ідеальної.

4. Процес експоненціальний, час перехідного процесу: $t_R = 3T$.

$$\text{Довідка. } x_1 = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

$$\Rightarrow y(t) = K \dot{x}(t) = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}}.$$

Наименование звена	Передачная функция $W(p)$	Переходная функция	Переходная характеристика	АФЧХ	ЛЧХ
Идеальное позиционное звено	K	K			
Реальное позиционное звено	$\frac{K}{Tp + 1}$	$K(1 - e^{-\frac{t}{T}})$			
Позиционное звено 2го порядка	$\frac{K}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$ $\frac{K}{Tp^2 + 2dT p + 1}$	$K \left[1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_2}} \right]$ $K \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-d^2}} e^{-\frac{t}{T}} \cdot \sin(\omega t + \alpha) \right]$ $\omega = \frac{\sqrt{1-d^2}}{T}; \quad \alpha = \arctg \frac{\sqrt{1-d^2}}{d}$			
Идеальное интегрирующее звено	$\frac{1}{Tp}$	$\frac{1}{T} \cdot t$			
Реальное интегрирующее звено		$\frac{1}{T} \left[t - T_1 (1 - e^{-\frac{t}{T_1}}) \right]$			
Идеальное дифференцирующее звено	Kp	$K \cdot \delta(t)$			
Реальное дифференцирующее звено	$\frac{Kp}{Tp + 1}$	$\frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}}$			
Форсирующее звено	$K(Tp + 1)$	$KT \cdot \delta(t) + K$			

Таблиця перетворень Лапласа.

№п/п	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
1.	$\delta(t)$	1
2.	$a \cdot \delta(t)$	a
3.	1(t)	$\frac{1}{p}$
4.	$a(t)$	$\frac{a}{p}$
5.	$a \cdot t^n \quad (n=1,2,\dots)$	$\frac{a \cdot n!}{p^{n+1}}$
6.	$\frac{t}{T} - \frac{T_1}{T} (1 - e^{-\frac{t}{T_1}})$	$\frac{1}{Tp (T_1 p + 1) p}$
7.	$\frac{a}{T} e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{a}{Tp+1}$
8.	$a(1 - e^{-\frac{t}{T}})$	$\frac{a}{p(Tp+1)}$
9.	$a(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_2}})$	$\frac{a}{p(T_1 p + 1) \cdot (T_2 p + 1)}$
10.	$a \cdot (1 - \frac{1}{\sqrt{1-d^2}} e^{-\frac{t}{T/d}} \cdot \sin(\frac{\sqrt{1-d^2}}{T} t + \arctg \frac{\sqrt{1-d^2}}{d})$	$\frac{a}{p(T^2 p^2 + 2dTp + 1)}; \quad d < 1$

Висновок: на лекції було розглянуто математичне вираження і характеристики елементів та пристроїв АУВПГ.

Завдання на самопідготовку:

1. Теорія автоматичного управління. Практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / Н.І. Бурау, Д.О. Півторак; КНІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – С 05-11.
https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/42076/1/TAU_praktykum.pdf