

**Державна служба України з надзвичайних ситуацій
Національний університет цивільного захисту України
Кафедра автоматичних систем безпеки та інформаційних технологій**

ЗАТВЕРДЖУЮ

Начальник кафедри АСБтаІТ

Роман ШЕВЧЕНКО

Навчальна дисципліна
**СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КОНТРОЛЮ
НЕБЕЗПЕЧНИХ ФАКТОРІВ**

Лекція № 4

**ПОНЯТТЯ СТІЙКОСТІ АС. АЛГЕБРАЇЧНИЙ КРИТЕРІЙ
СТІЙКОСТІ ГУРВІЦА. ВИЗНАЧЕННЯ МЕЖІ СТІЙКОСТІ.
ЧАСТОТНИЙ КРИТЕРІЙ СТІЙКОСТІ МИХАЙЛОВА**

Лекцію розробив:
Доцент кафедри АСБтаІТ



Вячеслав ДУРЕСОВ

ХАРКІВ 2024

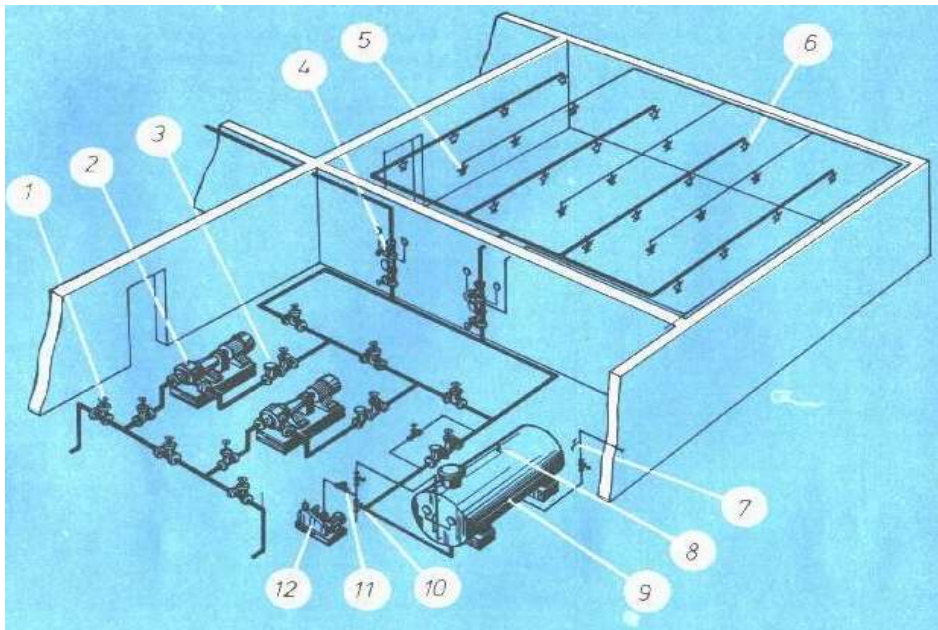
Зміст лекції:

Вступ

- 1 Поняття стійкості АС.
- 2 Математичні умови стійкості АС.
- 3 Алгебраїчний критерій стійкості Гурвіца.
- 4 Визначення границі стійкості за критерієм Гурвіца.
- 5 Графоаналітичний критерій стійкості Михайлова.

Вступ

В другій лекції, на прикладі АУВПП, було показано математичне вираження складових елементів та пристроїв. Сьогодні розглянемо, як математично оцінити їх сумісну роботу у складі АУВПП.



1 Поняття стійкості АС.

Система вважається **стійкою**, якщо будучи виведеної зі стану рівноваги вона знову повертається в цей стан після припинення дії збурювання, яке вивело систему з рівноваги.

Якщо після припинення дії збурювання система не повертається у вихідний стан, але і відхилення при цьому не збільшуються, то така система називається **нейтральною** (знаходиться на границі стійкості).

Якщо після припинення дії збурювання відхилення системи від рівноважного стану продовжує збільшуватися, то така система називається **хитливою**.

У ТАУ розглядаються тільки стійкі АС, що здатні вирішувати поставлені задачі з заданою точністю.

2 Математичні умови стійкості АС.

Щоб досліджувати стійкість математичної моделі АС необхідно покласти рівному нулю сигнал зовнішнього впливу $\bar{X}(t) = 0$ й досліджувати поведінку вихідного сигналу $\bar{y}(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Якщо $\bar{y}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, то це означає, що система стійка.

Якщо $\bar{y}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} const$, то це означає, що система нейтральна.

Якщо $\bar{y}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$, то це означає, що система нестійка.

Нехай динаміка АС описується ЛДУ загального виду:

$$a_0 \bar{y}^{(n)} + a_1 \bar{y}^{(n-1)} + \dots + a_j \bar{y}^{(n-j)} + \dots + a_{n-1} \dot{\bar{y}} + a_n \bar{y} = b \bar{x}.$$

Тоді поведінку системи при нульовому зовнішньому впливі буде описуватися лінійним однорідним рівнянням:

$$a_0 \bar{y}^{(n)} + a_1 \bar{y}^{(n-1)} + \dots + a_j \bar{y}^{(n-j)} + \dots + a_{n-1} \dot{\bar{y}} + a_n \bar{y} = 0$$

Загальне рішення однорідного рівняння має вигляд:

$$\bar{y}(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \dots + c_n e^{p_n t} = \sum_{i=1}^n c_i e^{p_i t},$$

де: n – порядок ЛДР; p_i – корінь характеристичного рівняння;

C_i – постійні інтегрування, обумовлені з початкових умов.

Із загального рішення однорідного рівняння видно, що

$$\bar{y}_i(t) = c_i e^{p_i t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, \text{ якщо } p_i < 0.$$

У загальному випадку частина корінь характеристичного рівняння комплексно сполучені:

$$p_i = \alpha_i \pm i \omega_i.$$

Для кожної пари комплексно сполучених корінь рішення шукається у вигляді:

$$\bar{y}_i(t) = C_{1i} e^{(\alpha_i + i \omega_i)t} + C_{2i} e^{(\alpha_i - i \omega_i)t}$$

Дійсне рішення буде мати вигляд:

$$\bar{y}_i(t) = e^{\alpha_i t} \cdot (A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t)$$

$$\text{або } \bar{y}_i(t) = C_i e^{\alpha_i t} \cdot \cos(\omega_i t + \varphi_i)$$

Видно, що $\bar{y}_i(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, якщо $\alpha_i < 0$.

Висновок: необхідною й достатньою умовою стійкості АС є запереченість речовинних частин всіх корінь характеристичного рівняння.

Якщо хоча б одне з речовинних корінь позитивний або позитивна дійсна частина мнимого кореня, то

$$\bar{y}_i(t) = c_i e^{p_i t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty, \quad \text{що свідчить про нестійкість АС.}$$

Граничному стану АС відповідає наявність одного нульового кореня. При цьому якщо нулю дорівнює дійсний корінь, то система перебуває на гра-

ниці аперіодичної стійкості, а якщо нулю дорівнює дійсна частина уявного кореня, то система перебуває на границі коливальної стійкості.

Довідка. У випадку кратних коріння рішення ДУ шукається у вигляді:

$$\overline{y}_i(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \dots + c_m t^{m-1}) e^{p_i t},$$

де m-кратність i-го кореня. Якщо $\operatorname{Re} p_i < 0$, то $\overline{y}_i(t) = \dots \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ й АС буде стійкою.

Для випадку кратного нульового кореня рішення ДУ варто шукати у вигляді:

$$\overline{y}_i(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \dots + c_m t^{m-1}, \text{ де m-кратність нульового кореня.}$$

Якщо $m=1$, то $\overline{y}_i(t) = \dots \xrightarrow{t \rightarrow \infty} c_i$ й система є нейтральною.

Якщо $m>1$, то $\overline{y}_i(t) = \dots \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ й система є нестійкою

Зауваження: реальні АС описуються нелінійними ДУ.

В 1892р. Ляпуновим було доведено:

1. Якщо лінійна модель АС стійкий, то стійко й вихідна нелінійна АС.
2. Якщо лінійна модель АС нестійкий, то нестійко й вихідна нелінійна АС.
3. Якщо лінійна модель АС нейтральний, то про стійкість вихідної нелінійної АС нічого сказати не можна. Потрібні додаткові дослідження.

3 Алгебраїчний критерій стійкості Гурвіца.

При дослідженні лінійних АС на стійкість найбільші труднощі представляє визначення коріння характеристичного рівняння. Для рівнянь вище 4-го порядку це завдання аналітично взагалі вирішене бути не може. Тому були розроблені критерії, що дозволяють побічно судити про знаки коріння характеристичного рівняння. Одним з найпоширеніших критеріїв є алгебраїчний критерій Гурвіца, який в 1895р. довів, що лінійна АС із характеристичним рівнянням загального виду:

$$a_0 p^n + a_1 p^{(n-1)} + \dots + a_j p^{(n-j)} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0,$$

стійка, якщо при $a_0 > 0$, позитивні всі визначники Гурвіца.

Визначники Гурвіца складаються за допомогою квадратної матриці $n \times n$:

$$\begin{array}{c|cccccc|c|c} \Delta_1 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \Delta_2 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \Delta_3 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \Delta_4 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ \hline \Delta_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & a_{n-1} & 0 \\ \Delta_n & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & a_{n-2} & a_n \end{array} = \Delta_n$$

Нулями в матриці заповнюються вільні місця.

Довідка. Нехай є визначник Δ_n загального виду в якому i -номер рядка, k -номер стовпця.

1. Мінором M_{ik} визначника Δ_n називають визначник Δ_{n-1} , отриманий з Δ_n викреслюванням i -й рядка й k -го стовпця.

2. Під алгебраїчним доповненням A_{ik} елемента a_{ik} розуміють мінор M_{ik} помножений на $(-1)^{i+k}$

Теорема розкладання визначника Δ_n по елементах рядка або стовпця:

По елементах рядка $\Delta_n = \sum_{i=1}^n a_{ik} \cdot A_{ik}$; по елементах стовпця: $\Delta_n = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot A_{ik}$

А) Умови стійкості системи 1-го порядку.

Характеристичне рівняння: $a_0 p + a_1 = 0$

Відповідно до критерію Гурвіца АС стійка, якщо при $a_0 > 0$: $\Delta_1 = a_1 > 0$. Отже, достатньою умовою стійкості АС 1-го порядку є позитивність коефіцієнтів характеристичного рівняння.

Б) Умови стійкості системи 2-го порядку.

Характеристичне рівняння:

$$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0$$

Відповідно до критерію Гурвіца АС стійка, якщо при $a_0 > 0$: $\Delta_1 > 0$ і $\Delta_2 > 0$.

1. $\Delta_1 = a_1 > 0$.

2. $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot 0 = a_1 \cdot a_2 \Rightarrow a_2 > 0$.

Отже, достатньою умовою стійкості АС 2-го порядку є позитивність коефіцієнтів характеристичного рівняння.

В) Умови стійкості системи 3-го порядку.

Характеристичне рівняння:

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$$

Відповідно до критерію Гурвіца АС стійка, якщо при $a_0 > 0$: $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$.

1. $\Delta_1 = a_1 > 0$.

2. $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 > 0 \Rightarrow a_1 \cdot a_2 > a_0 \cdot a_3$.

3. $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \Delta_2 \cdot a_3$.

З умови 3 треба, щоб $a_3 > 0$, тоді аналізуючи умову 2, неминуче дійдемо висновку, що $a_2 > 0$, і разом з тим $a_1 a_2 > a_0 a_3$.

Отже: АС 3-го порядку є стійкою, якщо при позитивності всіх коефіцієнтів характеристичного рівняння добуток середніх коефіцієнтів більше добутку крайніх: $a_1 a_2 > a_0 a_3$.

4 Визначення границі стійкості за критерієм Гурвіца.

Часто потрібно визначити область параметрів у якій у якій система стійка. Для цього необхідно знати границю стійкості. Система знаходиться на границі стійкості якщо серед коренів характеристичного рівняння мається один нульовий корінь (границя аперіодичної стійкості) чи один комплексно-сполучений корінь з нулевою дійсною частиною. Цій умові відповідає рівність нулю останнього визначника Гурвиця:

$$\Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1} = 0.$$

Якщо: $\Delta_{n-1} > 0$, $a_n = 0$ – АС на границі **аперіодичної** стійкості.

Якщо: $\Delta_{n-1} = 0$, $a_n > 0$ – АС на границі **коливної** стійкості.

Алгебраїчний критерій стійкості Гурвиця дозволяє аналітично досліджувати стійкість АС будь-якого порядку. Однак з підвищенням порядку АС обчислення стають досить громіздкими, що вимагає застосування сучасних ЕОМ.

5 Графоаналітичний критерій стійкості Михайлова (1938)

Алгебраїчним критерієм Гурвиця важко користатися при дослідженні стійкості систем, порядок яких вище четвертого. Для дослідження таких систем більш зручний критерій Михайлова.

Розглянемо характеристичний поліном АС загального виду:

$$L(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n.$$

Замінімо параметр p на $j\omega$, де $\omega \in [0, +\infty)$ - дійсна перемінна. У результаті такої підстановки одержимо комплексне число $L(j\omega)$. Виявляється, що по виду годографа вектора $\vec{L}(j\omega)$ при зміні ω від 0 до ∞ можна судити про стійкість АС. Часто вектор $\vec{L}(j\omega)$ називають вектором Михайлова.

Нехай: $p_1; p_2; \dots p_n$ - корені характеристичного полінома $L(p) = 0$.

У цьому випадку характеристичний поліном можна розкласти на множники по коренях характеристичного рівняння:

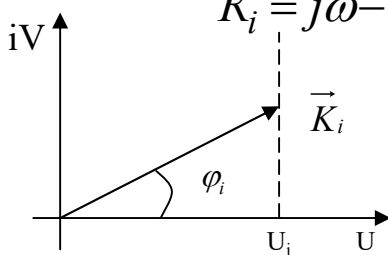
$$L(p) = a_0 \cdot (p - p_1) \cdot (p - p_2) \cdot \dots \cdot (p - p_n).$$

Замінімо параметр p на $j\omega$, одержимо:

$$L(j\omega) = a_0 \cdot (j\omega - p_1) \cdot (j\omega - p_2) \cdot \dots \cdot (j\omega - p_n).$$

Кожен множник являє собою комплексне число K_i :

$$K_i = j\omega - p_i = U_i + jV_i = A_i \cdot e^{j\varphi_i}; \text{ де } V_i = \omega; U_i = -p_i.$$



Якщо корінь $p_i < 0$, то $U_i > 0$. Вектор $\vec{K}_i$ розташовується в першому квадранті. При зміні ω від 0 до ∞ вектор повернеться на кут $+\pi/2$ (проти годинникової стрілки).

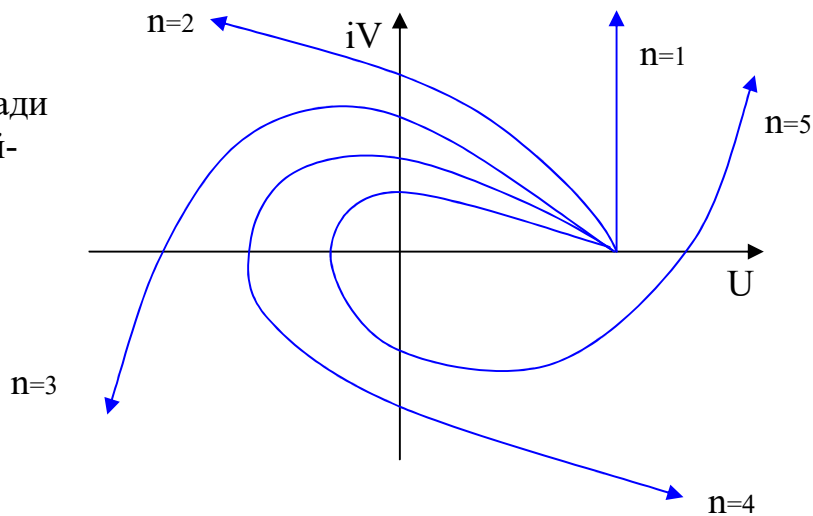
Якщо система стійка, то кожен вектор $\vec{K}_i$ при зміні ω від 0 до ∞ повернеться на кут $+\pi/2$, а оскільки при перемножуванні комплексних чисел їхні аргументи (кути φ_i) складаються:

$$L(j\omega) = a_0 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_n e^{j(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_n)}$$

то результуючий вектор повернеться на кут $\varphi = \frac{n \cdot \pi}{2}$, де n- порядок системи.

Критерій Михайлова: досліджувана АС буде стійкою, якщо годограф вектора $\vec{L}(j\omega)$ починається на дійсній осі і при зміні ω від 0 до ∞ послідовно перетинає n квадрантів проти часової стрілки. Де n – порядок АС.

Рис.5.1. Приклади годографів стійких систем



Якщо корінь $p_i > 0$, то $U_i < 0$ і вектор $\vec{K}_i$ розташовується в другому квадранті. При зміні ω від 0 до ∞ вектор повернеться на кут $-\pi/2$ (по годинній стрілці). Результуючий вектор Михайлова повернеться на кут:

$$\varphi = (n - r) \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{n \cdot \pi}{2},$$

де r – кількість позитивних коренів характеристичного рівняння.

Висновок: годограф вектора Михайлова хитливої системи не перетинає послідовно n квадрантів.

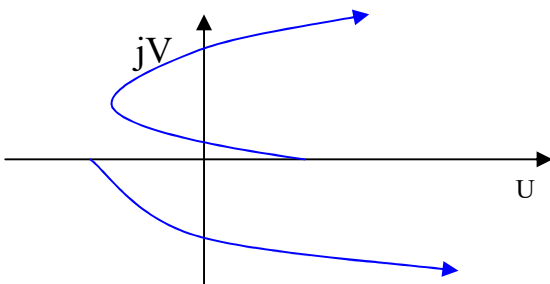
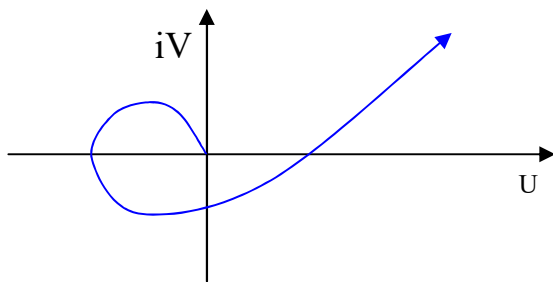


Рис.5.2. Приклади годографів хитливих систем.

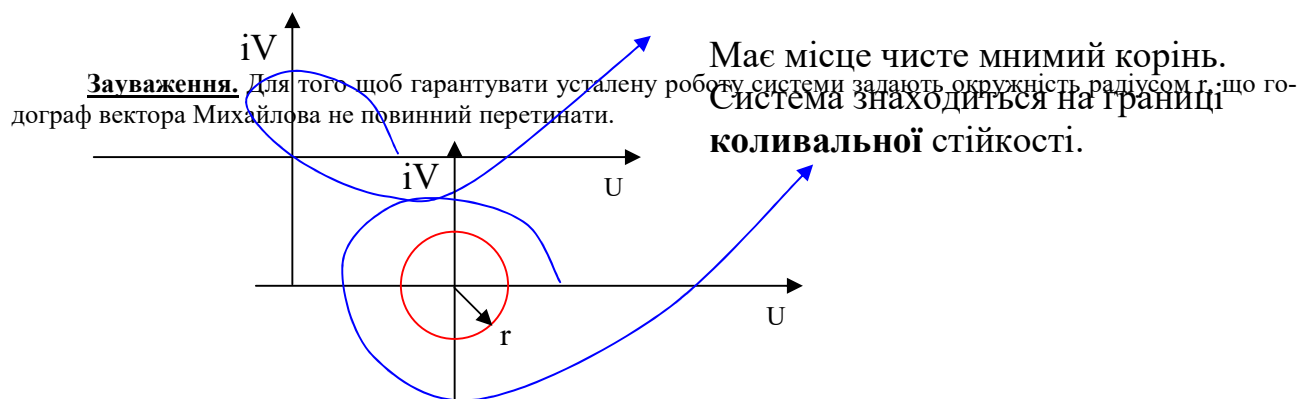
Особливі випадки

1. Годограф вектора Михайлова виходить з початку координат.



Має місце нульовий корінь $P_i=0$.
Система знаходиться на межі
аперіодичної стійкості.

2. Годограф вектора Михайлова проходить через початок координат.



Приклад Використовуючи критерій Михайлова, дослідити стійкість АС з передатною функцією:

$$W(p) = \frac{50}{6p^3 + p^2 + 24p + 1}.$$

Рішення. Система третього порядку стійка, якщо годограф вектора Михайлова починається на позитивній дійсній осі і послідовно перетинає три квадранти.

Характеристичне рівняння АС: $6p^3 + p^2 + 24p + 1 = 0$.

Вектор Михайлова: $L(i\omega) = -6i\omega^3 - \omega^2 + 24i\omega + 1$.

$$U(\omega) = -\omega^2 + 1, \quad V(\omega) = -6\omega^3 + 24\omega.$$

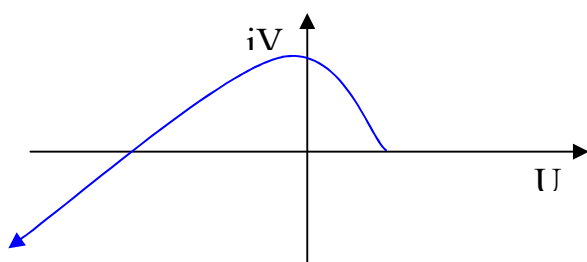
Годограф вектора можна побудувати по точках, змінюючи ω від 0 до ∞ . А можна і по точках перетинання годографа з вісями.

Визначимо крапки перетинання годографа з вісями:

$$V(\omega) = 0, \quad -6\omega^3 + 24\omega = 0, \quad \omega_1 = 0; \quad \omega_2 = 2.$$

$$U(\omega) = 0, \quad -\omega^2 + 1 = 0, \quad \omega_3 = 1$$

ω	0	1	2
U	1	0	-3
V	0	18	0



Крива Михайлова починається на позитивній дійсній вісі та послідовно перетинає 3 квадранти, Значить АС стійка.

Висновки:

На лекції було розглянуто поняття стійкості та критерії по яким вона визначається.

Завдання на самопідготовку:

1. Теорія автоматичного управління. Практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / Н.І. Бурау, Д.О. Півторак; КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – С 50-54.

https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/42076/1/TAU_praktykum.pdf